

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2001-2002

Bruno Franchi

PROPRIETÀ *SELF-IMPROVING*
DELLA DISUGUAGLIANZA DI POINCARÉ

30 gennaio 2002

Tecnoprint - Bologna 2003

Abstract. In this seminar we illustrate some recent joint results with C. Pérez and R.L. Wheeden on the self-improving property of generalized Poincaré inequalities.

Riassunto. In questo seminario presentiamo alcuni risultati ottenuti recentemente in collaborazione con C. Pérez e R.L. Wheeden sulla proprietà di self-improving di certe disuguaglianze di Poincaré generalizzate.

In questo seminario intendo presentare alcuni risultati recenti ottenuti in collaborazione con C. Pérez e R.L. Wheeden ([5]).

È ben noto che disuguaglianze di Poincaré-Sobolev nello spazio euclideo posso essere ottenute da disuguaglianze $L^p - L^q$ per integrali frazionari di Riesz. Per esempio, la stima classica

$$(1) \quad \left(\int_B |f(x) - f_B|^q dx \right)^{1/q} \leq c \left(\int_B |\nabla f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \quad 1 < p < n,$$

dove B è una sfera Euclidea in \mathbb{R}^n e $f_B = \frac{1}{|B|} \int_B f(x) dx$, può essere ottenuta dalla stima integrale

$$(2) \quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_1 f(x)|^q dx \right)^{1/q} \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

per gli stessi valori di p e q , dove c è indipendente da f e

$$I_1 f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-1}} dy$$

è la trasformata di Riesz di f di ordine 1. Analogamente, benchè (2) sia falsa per $p = 1$ e $q = n/(n-1)$, il caso $p = 1$ di (1) può essere ottenuto dalla seguente stima di tipo debole analoga a (2):

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |I_1 f(x)| > \lambda\}|^{(n-1)/n} \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \lambda > 0,$$

con c indipendente da λ e f , dove $|E|$ denota la misura di Lebesgue dell'insieme E .

La formula di rappresentazione puntuale

$$|f(x) - f_B| \leq c I_1(|\nabla f| \chi_B)(x), \quad x \in B,$$

con c indipendente da x, B e f , chiarisce come (1) segua da (2) se $p > 1$, e un argomento molto più sofisticato basato sulle proprietà dei troncamenti può essere usato quando $p = 1$ (si vedano [7], [13]).

Recentemente, stime forti per trasformazioni integrali più generali sono state usate per ottenere stime di Poincaré-Sobolev per campi vettoriali e per situazioni molto più generali, come varietà, gruppi o spazi metrici nel senso di [1]. Per esempio, sia $\rho(x, y)$ una metrica in \mathbb{R}^n indotta da una famiglia X di campi vettoriali di Carnot-Carathéodory, e supponiamo che la misura di Lebesgue sia doubling per le ρ -sfere, cioè che $|B(x, 2r)| \leq C|B(x, r)|$ con C indipendente da x e r , dove $B(x, r)$ denota la ρ -sfera di centro x e raggio r . Allora l'operatore

$$I(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{\rho(x, y)}{|B(x, \rho(x, y))|} dy$$

mappa L^p in L^q con p, q legate in termini della proprietà di doubling, e queste stime portano a disuguaglianze di Poincaré-Sobolev della forma

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B|^q dx \right)^{1/q} \leq c r(B) \left(\frac{1}{|B|} \int_B |Xf(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

dove $r(B)$ è il raggio della ρ -sfera B . La ragione per cui la disuguaglianza di Poincaré-Sobolev segue è che esiste una rappresentazione integrale della forma

$$(3) \quad |f(x) - f_B| \leq c I(|Xf| \chi_B)(x), \quad x \in B,$$

con c indipendente da x, B e f ; si veda ad esempio [2], [3], [8] per la formula di rappresentazione, e, ad esempio, [13] per le proprietà di continuità dell'operatore I .

D'altra parte, partendo dal lavoro di Saloff-Coste [12], è noto che le stime di Poincaré-Sobolev hanno una natura self-improving, nel senso che è possibile stime per p, q generali da casi particolari come

$$(4) \quad \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B| dx \leq c r(B) \left(\frac{1}{|B|} \int_B |Xf|^{p_0} dx \right)^{1/p_0}$$

per qualche p_0 , senza un esplicito uso di alcun operatore integrale.

Una spiegazione parziale di questo fenomeno e del ruolo di un operatore integrale nelle tecniche di self-improving è data in [2] e con costanti sharp in [9] (si vedano anche [3], [8], [10], [11]). Viene infatti provato che nel caso $p_0 = 1$, (4) è equivalente a (3). In particolare, assumendo (4) con $p_0 = 1$, abbiamo anche (3), e stime di Poincaré-Sobolev più generali con misure diverse seguono dalle stime corrispondenti per l'operatore integrale I .

Tuttavia, nel caso $p_0 > 1$, non si conosce una rappresentazione precisa come (3) che segua da (4). Quando $p_0 > 1$, la difficoltà che si incontra cercando di adattare gli argomenti che portano da (4) a (3) nel caso $p_0 = 1$ è legata alla presenza dell'esponente $1/p_0$: il funzionale $a(B)$ definito da

$$a(B) = r(B) \left(\frac{1}{|B|} \int_B |g|^{p_0} dx \right)^{1/p_0} \quad (g \text{ e } p_0 \text{ fissati})$$

non è facile a sommarsi catene di sfere B anche se disgiunte quando $p_0 > 1$. Così, partendo da una stima del tipo

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f - f_B| dx \leq c a(B)$$

per tutte le sfere B con $a(B)$ come sopra e $p_0 > 1$, o anche con funzionali $a(B)$ più generali, non è chiaro come costruire un operatore integrale le cui stime di tipo forte implicino stime di Poincaré-Sobolev migliorate come

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B |f - f_B|^q dx \right)^{1/q} \leq C a(B) \quad \text{for some } q > 1.$$

Il risultato principale che intendo illustrare mostra che il ruolo rappresentato usualmente dagli operatori integrali è rappresentato in generale da operatori somma $T(x)$ ottenuto sommando $a(B)$ su una opportuna catena di sfere associata a un punto x :

$$T(x) = \sum_{B \text{ è una catena per } x} a(B).$$

Nel caso $p_0 = 1$, l'operatore di somma diviene un operatore integrale, ma, in generale, le proprietà di continuità forte da L^p a L^q possono essere ottenute in modo analogo a quello utilizzato per operatori integrali, portando a corrispondenti stime di Poincaré-Sobolev.

In particolare, si ottengono stime di Poincaré-Sobolev per operatori $a(B)$ del tipo

$$a(B) = r(B) \left(\frac{1}{|B|} \int_B |Xf|^{p_0} dx \right)^{1/p_0}.$$

Si vedano anche [14] e [6] per tipi differenti di operatori somma.

Nel seguito (S, ρ) sarà uno spazio quasimetrico fornito di una misura di Borel doubling μ che rende (S, ρ, μ) uno spazio quasimetrico di tipo omogeneo nel senso che

- (i) $\rho(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in S$, e $\rho(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
- (ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ per ogni $x, y \in S$;
- (iii) $\rho(x, y) \leq K[\rho(x, z) + \rho(z, y)]$ per ogni $x, y, z \in S$.

Se $x \in S$ e $r > 0$, sia $B(x, r)$ la ρ -sfera centrata in x di raggio r , cioè $B(x, r) = \{y \in S : \rho(x, y) < r\}$. Se B è una ρ -sfera, diremo B semplicemente 'una sfera', $r(B)$ sarà il suo raggio e la sua μ -misura sarà indicata con $|B|_\mu$. Inoltre, se $c > 0$, denoteremo con cB la sfera con lo stesso centro di B e con $r(cB) = cr(B)$.

Assumeremo sempre che μ abbia la *doubling property* seguente:

- (iv) Esiste $A > 0$ tale che

$$|B(x, 2r)|_\mu \leq A |B(x, r)|_\mu$$

per ogni $x \in S$ e r .

Definition 0.1. Diremo che una misura di Borel localmente finita ω appartiene alla classe $D = D(S, \rho)$ se esiste una costante $A_\omega > 1$ tale che ω

$$(5) \quad |B(x, 2r)|_\omega \leq A_\omega |B(x, r)|_\omega$$

per ogni $x \in S$ e $r > 0$, dove $|E|_\omega = \int_E d\omega$ per ogni insieme misurabile E . Se ω è μ -assolutamente continua, cioè se $d\omega = w d\mu$ per una funzione $w \in L_{loc}(d\mu)$ nonnegativa, scriviamo $|E|_\omega = |E|_{wd\mu}$ e chiamiamo w una funzione peso.

IPOTESI GEOMETRICHE: Sia B_0 una sfera fissata in (S, ρ) . Supponiamo che per ogni $x \in B_0$ esista una catena di sfere $\{B_j\} = \{B_j(x)\}_{j=1}^\infty$ che soddisfa

- (H1) $B_j \subset B_0$ per ogni $j \geq 0$;
- (H2) $r(B_j) \approx 2^{-j} r(B_0)$ per ogni $j \geq 0$;
- (H3) $\rho(B_j, x) \leq cr(B_j)$ per ogni $j \geq 0$,

dove $\rho(B_j, x)$ denota la distanza di x da B_j , e assumiamo che le costanti in (H2) e (H3) siano indipendenti da x e j . Notiamo che le sfere $B_j(x)$ possono contenere o no x , ma la successione $\{B_j(x)\}$ dipende x .

- Segue da (H2), (H3) e (iii) che

- (H4) Se $j < k$ allora $B_k \subset CB_j$, dove C è una costante geometrica.

Remark 0.2. Sappiamo da [8] e [3] che una catena soddisfacente (H1)–(H3), e quindi anche (H4), esiste in ogni spazio metrico che soddisfa la *proprietà del segmento*, cioè in spazi metrici tali che per ogni coppia di punti $x, y \in S$ esiste una curva continua $\gamma : [0, T] \rightarrow S$ che congiunge x e y tale che $\rho(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|$ per ogni $s, t \in [0, T]$. Tale catena ha anche la proprietà ulteriore

- (H5) Per ogni $j \geq 0$, $B_j \cap B_{j+1}$ contiene una sfera S_j con $r(S_j) \approx r(B_j)$;
- (H6) $\rho(B_j, x) \approx r(B_j)$ per ogni $j \geq 0$;
- (H7) $\{B_j\}$ hanno sovrapposizioni limitate.

Tipicamente, le metriche di Carnot–Carathéodory e le metriche Riemanniane godono della proprietà del segmento.

Definition 0.3. Sia $a : B \rightarrow a(B)$ un funzionale non negativo definito sulle sfere $B \subset B_0$. Se $x \in B_0$, sia

$$(6) \quad T(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a(B_j(x)),$$

dove $\{B_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ è una successione di sfere che soddisfano (H1), (H2), e (H3), e $B_0(x) = B_0$ per ogni $x \in B_0$.

Diremo $T(x)$ un operatore somma associato al funzionale $a(B)$.

Il significato di $T(x)$ sta nella seguente formula di rappresentazione puntuale.

Theorem 0.4. *Supponiamo che valgano (H1)–(H3) e (H5). Sia $f \in L^1(B_0, \mu)$ tale che per ogni sfera $B \subset B_0$,*

$$(7) \quad \frac{1}{|B|_\mu} \int_B |f - f_B| d\mu \leq c a(B),$$

dove $f_B = \frac{1}{|B|_\mu} \int_B f d\mu$. Allora per μ -q.o. $x \in B_0$

$$(8) \quad |f(x) - f_{B_0}| \leq C T(x),$$

dove C è una costante geometrica che dipende anche dalla costante di (7).

Possiamo ora enunciare il nostro risultato principale, una stima debole per l'operatore T .

Theorem 0.5. *Sia $0 < q < \infty$ e $\omega \in D$. Supponiamo valgano (H1)–(H3), ed esistano due costanti positive θ e c tali che $\theta < 1$ e*

$$(9) \quad \sum_j \{a(Q_j)^q |Q_j|_\omega\}^\theta \leq c \{a(B_0)^q |B_0|_\omega\}^\theta$$

per tutte le famiglie $\{Q_j\}$ di sottosfere disgiunte di B_0 . Allora

$$(10) \quad \sup_{\lambda > 0} \lambda |\{x \in B_0 : T(x) > \lambda\}|_\omega^{1/q} \leq C a(B_0) |B_0|_\omega^{1/q},$$

dove C è una costante geometrica che dipende anche dalla costante di (9).

Come conseguenza dei Teoremi 0.4 e 0.5, possiamo ottenere il seguente risultato di self-improving di tipo debole per la disuguaglianza di Poincaré–Sobolev in B_0 .

Theorem 0.6. *Supponiamo valgano (H1)–(H3) e (H5). Supponiamo anche $\omega \in D$ e che valga (9) per qualche $\theta < 1$ e $1 < q < \infty$. Se f una funzione reale di Borel in B_0 che soddisfa*

$$(11) \quad \frac{1}{|B|_\mu} \int_B |f - c_B| d\mu \leq c a(B)$$

per ogni sfera $B \subset B_0$, dove c_B è un numero reale dipendente da B e f , allora

$$(12) \quad \sup_{\lambda > 0} \lambda |\{x \in B_0 : |f(x) - f_{B_0}| > \lambda\}|_\omega^{1/q} \leq C a(B_0) |B_0|_\omega^{1/q},$$

dove $f_{B_0} = \frac{1}{|B_0|_\mu} \int_{B_0} f d\mu$ e C è una costante geometrica che dipende anche dalle costanti di (9) e (11).

Corollary 0.7. *Siano soddisfatte le ipotesi del Teorema 0.6, inclusa (9) per qualche $\theta < 1$ e $\omega \in D$. Allora, se $0 < r < q$,*

$$(13) \quad \left(\frac{1}{|B_0|_\omega} \int_{B_0} |f - f_{B_0}|^r d\omega \right)^{1/r} \leq c a(B_0),$$

dove c è una costante geometrica dipendente anche da r, q .

Proposition 0.8. Siano ν e ω misure di Borel in B_0 . Dati p e una funzione g tale che $0 < p < \infty$, $g \in L^p(B_0, d\nu)$ e $g \geq 0$, poniamo

$$(14) \quad a(B) = r(B) \left(\frac{1}{|B|_\nu} \int_B g^p d\nu \right)^{1/p}.$$

Se la condizione di 'balance'

$$(15) \quad \frac{r(B)}{r(B_0)} \left(\frac{|B|_\omega}{|B_0|_\omega} \right)^{1/q} \leq c \left(\frac{|B|_\nu}{|B_0|_\nu} \right)^{1/p}$$

vale per qualche q e per ogni $B \subset B_0$, allora vale (9) con $\theta = p/q$ per (14).

In particolare se $\omega = \mu$ and $\nu = \mu$, la condizione di balance (15) si riduce a una condizione di doubling $\mu \in D_N$, $N = (1/p - 1/q)^{-1}$.

Combinando il Corollario 0.7 e la Proposizione 0.8, otteniamo immediatamente il risultato seguente di self-improving.

Corollary 0.9. Supponiamo valgano (H1)-(H3) e (H5), $\omega \in D(S, \rho)$, e f sia una funzione di Borel reale in B_0 . Sia ν una misura di Borel in S tale che la condizione di balance (15) valga per qualche coppia p, q con $0 < p < q$, e r soddisfi $0 < r < q$. Se esiste $g \geq 0$ tale che per ogni sfera $B \subset B_0$ esista $c_B \in \mathbb{R}$ con

$$(16) \quad \frac{1}{|B|_\mu} \int_B |f - c_B| d\mu \leq c r(B) \left(\frac{1}{|B|_\nu} \int_B g^p d\nu \right)^{1/p},$$

allora

$$(17) \quad \left(\frac{1}{|B_0|_\omega} \int_{B_0} |f - f_{B_0}|^r d\omega \right)^{1/r} \leq c r(B_0) \left(\frac{1}{|B_0|_\nu} \int_{B_0} g^p d\nu \right)^{1/p}.$$

Nel caso particolare di metriche di Carnot-Carathéodory il risultato precedente può essere migliorato con $r = q$.

Corollary 0.10. Siano μ e ν misure di Borel doubling in (\mathbb{R}^n, ρ) , $p_0 > 0$ e X sia un operatore differenziale tale che

$$(18) \quad \frac{1}{|B|_\mu} \int_B |f - f_B| d\mu \leq C r(B) \left(\frac{1}{|B|_\nu} \int_B |Xf|^{p_0} d\nu \right)^{1/p_0}$$

per tutte le sfere B e per tutte le funzioni lipschitziane f . Sia $p_0 \leq p < q < \infty$, e assumiamo che $\omega \in D$, $v \in A_{p/p_0}(\nu)$, e che:

$$(19) \quad \frac{r(\tilde{B})}{r(B)} \left(\frac{|\tilde{B}|_\omega}{|B|_\omega} \right)^{1/q} \leq C \left(\frac{|\tilde{B}|_{v d\nu}}{|B|_{v d\nu}} \right)^{1/p}$$

per tutte le sfere \tilde{B}, B tali che $\tilde{B} \subset B$. Allora

$$(20) \quad \left(\frac{1}{|B|_\omega} \int_B |f - f_B|^q d\omega \right)^{1/q} \leq C r(B) \left(\frac{1}{|B|_{v d\nu}} \int_B |Xf|^p v d\nu \right)^{1/p}$$

con C indipendente da f e B .

REFERENCES

- [1] R. R. Coifman & G. Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, Lecture Notes in Math., Vol. 242, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1971.
- [2] B. Franchi, G. Lu & R. L. Wheeden, *A relationship between Poincaré type inequalities and representation formulas in spaces of homogeneous type*, Internat. Math. Res. Notices (1996), 1–14.
- [3] B. Franchi & R. L. Wheeden, *Some remarks about Poincaré type inequalities and representation formulas in metric spaces of homogeneous type*, J. Inequalities and Applications 3 (1999), 65–89.
- [4] B. Franchi, C. Pérez & R. L. Wheeden, *Self-improving properties of John–Nirenberg and Poincaré inequalities on spaces of homogeneous type*, J. Functional Analysis 153 (1998), 108–146.
- [5] B. Franchi, C. Pérez & R. L. Wheeden, *A sum operator with applications to self-improving properties of Poincaré inequalities in metric spaces*, J. Fourier Anal. Appl., in corso di stampa.
- [6] P. Hajlasz & P. Koskela, *Sobolev met Poincaré*, Mem. Amer. Math. Soc. 688 (2000).
- [7] R. Long & F. Nie, *Weighted Sobolev inequality and eigenvalue estimates of Schrödinger operators*, Harmonic Analysis (Tianjin, 1988). Lect. Notes Math. 1494, Springer, 1991.
- [8] G. Lu & R. L. Wheeden, *High order representation formulas and embedding theorems on stratified groups and generalizations*, Studia Math. 142 (2000), 101–133.
- [9] P. MacManus & C. Pérez, *Generalized Poincaré inequalities: Sharp self-improving properties*, Internat. Math. Res. Notices 2 (1998), 101–116.
- [10] P. MacManus & C. Pérez, *Trudinger's inequality without derivatives*, appeared electronically in Trans. Amer. Math. Soc., January, 2002.
- [11] J. Oröbitg & C. Pérez, *A_p weights for nondoubling measures in R^n and applications*, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.
- [12] L. Saloff-Coste, *A note on Poincaré, Sobolev and Harnack inequalities*, Internat. Math. Res. Notices 2 (1992), 27–38.
- [13] E. Sawyer & R. L. Wheeden, *Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and homogeneous spaces*, Amer. J. Math. 114 (1992), 813–874.
- [14] I. E. Verbitsky & R. L. Wheeden, *Weighted norm inequalities for integral operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998), 3371–3391.